令和２年 神奈川県高校入試問題（数学）の略解・解説

2020 年 4 月 20 日

問題１．(ア) $2-(-9)=2+9=11$

(イ) $52a^2b\div(-4a)=-\dfrac{52a^2b}{4a}=-13ab$

(ウ) $\sqrt{28}+\dfrac{49}{\sqrt{7}}=\sqrt{4\cdot 7}+\dfrac{49\sqrt{7}}{7}=2\sqrt{7}+7\sqrt{7}=9\sqrt{7}$

(エ) $\dfrac{3x-y}{3}-\dfrac{x-2y}{4}=\dfrac{4(3x-y)-3(x-2y)}{12}=\dfrac{12x-4y-3x+6y}{12}=\dfrac{9x+2y}{12}$

(オ) $(\sqrt{2}+1)^2-5(\sqrt{2}+1)+4=2+2\sqrt{2}+1-5\sqrt{2}-5+4=2-3\sqrt{2}$

＊各問のレベルはすべて４。解答の過程は、問題用紙の余白に、上のように展開式のすべてをかくのがよい。(ウ) の $4\cdot 7$ は 4×7 を表す。ドット $\cdot$ はかけ算の記号。

問題２．（ア） 連立方程式

$$\begin{cases} ax+by=10 \\ bx-ay=5 \end{cases} \tag{1}$$

の解が $x=2,\ y=1$ なので、

$$\begin{cases} 2a+b=10 \\ 2b-a=5 \end{cases} \tag{2}$$

となる。式 (2) は $a,\ b$ についての連立方程式だから、これを加減法または代入法で解けばよい。

【加減法】

$$\begin{array}{rr} & 2a+b=10 \\ +) & -2a+4b=10 \\ \hline & 5b=20 \end{array} \quad \Rightarrow \quad b=4.$$

(2) の第２式に代入して、$8-a=5,\quad \therefore\ a=3.$

（答え）$a=3,\ b=4$

【代入法】

式 (2) の第２式から $a=2b-5$ これを第１式に代入して $2(2b-5)+b=10,\quad 4b-10+b=10,\quad 5b=20,\quad \therefore b=4.\quad \to\quad a=3.$

＊この問はレベル３。

（イ） 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の公式 $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ を用いると、$x^2-5x-3=0$ の解は

$$\frac{5\pm\sqrt{25+12}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{37}}{2}.$$

＊この問はレベル４。公式に代入するだけのつまらない問題。

（ウ） 関数 $y=-\dfrac{1}{3}x^2$ の x が３から６まで増加するときの変化の割合は、この範囲で

関数の値は単調に減少しているので、

$$\frac{-\frac{1}{3}\times 6^2-\left(-\frac{1}{3}\times 3^2\right)}{6-3}=\frac{-12+3}{3}=-\frac{9}{3}=-3.$$

＊この問のレベルは４。いい問題ではない。2 次関数に対して“変化の割合“という言葉はあいまいな言葉である。教科書では、 $(\text{変化の割合})=\dfrac{(y\text{ の増加量})}{(x\text{ の増加量})}$ と定義されている。例えば、この問題で、 x が -1 から 6 まで増加するときの変化の割合と言われたとき、y の増加量はどうやって計算しますか？y の変域は $-12 \leqq y \leqq 0$ と正確にわかるが、y の増加量とは何ですか。y の値は $-\frac{1}{3}$ から 0 まで、一度増えて（即ち、増加量 $\frac{1}{3}$)、そのあとで 0 から -12 まで減少します（即ち、増加量 -12)。正確な y の増加量は各区間での増加量の和 $\frac{1}{3}-12$ ですが、こんなこと教科書にきちんとかいてありますか？また、きちんと教えていますか？生徒は、y の変域と y の増加量の違いをきちんと使い分けできますか。高校の教科書にあるように平均変化率として定義するのがいいですね。関数 $y=ax^2$ に対して、x が c から d まで増加するとき、

$$(y\text{ の変化の割合})=\frac{ad^2-ac^2}{d-c}.$$

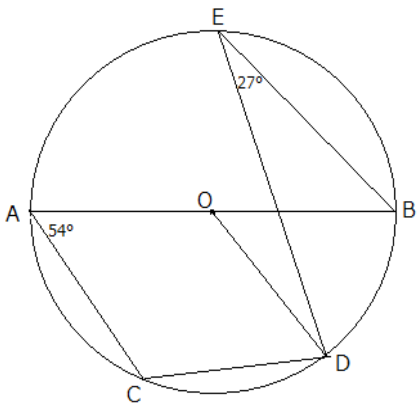
(エ)　大人一人の入園料を x、子ども一人の入園料を y とすると、次の連立方程式を得る。

$$\begin{cases} x=y+600 & \cdots\ ① \\ x:y\ =\ 5:2 & \cdots\ ② \end{cases}$$

①より、$2x\ =\ 2y+1200,$ ②より、$2x\ =\ 5y$ だから $5y\ =\ 2y+1200.$ $3y\ =\ 1200$ より、$y=400.$
＊この問はレベル３。
(オ)　5880 を素因数分解すると、$5880=2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7^2$. これから、次の式が得られる：

$$\frac{5880}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7^2}=2^2,\quad \frac{5880}{2^3\cdot 3\cdot 5}=7^2,\quad \frac{5880}{2\cdot 3\cdot 5}=14^2.$$

左辺の分母が最小になるのは、最後のもので、$n=30$。
＊この問はレベル３。
(カ)　与えられた図は下の左のもの。右図は補助線を 2 本ひき、角度が分かるところを記入。



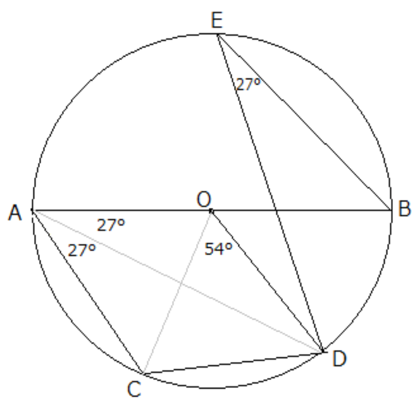


図 1: 与えられた図

補助線 AD, OC を引くと、∠BAD は弧 BD の円周角だから 27°。そして　∠DAC=27°より、
弧 CD の中心角 ∠COD=54°。　△OCD は OC=OD の二等辺三角形。
よって、 ∠ODC= $(180-54)/2=63$°となる。
＊この問はレベル３。補助線が引ければ誰でもわかる。

問題３．（ア） 右図があたえられ、仮定は
∠DBE= ∠EBC である。
(i) △ADF と △BCH の
相似を証明する問題の穴埋めである。
(a) の答えは 弧 AB、(b) の答えは
∠CBE= ∠DBE.
円周角に関する問題で非常にやさしい。
(ii) ∠AFB と ∠AHB はそれぞれ上の相似
三角形の対応する外角なので等しい。この
２つの角は、ある円にたいする弧 AB の
円周角と考えてよい。よって 4 点 A, B, H, F
は同一円周上にある。（答えは　F, H ）
＊ (i) はレベル４、(ii) はレベル３。

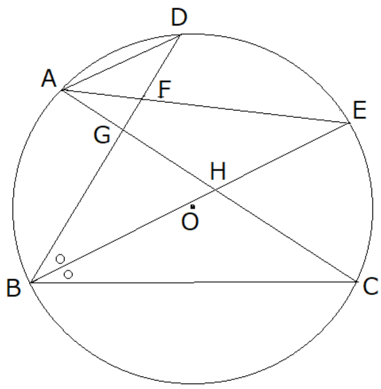


図 2: 問３,（ア）

（イ） 1 日の温度の寒暖差データを月ごとにまとめたヒストグラムが六つ（A から F まで、6 か月分）与えられていて、1 月と 11 月のヒストグラムをあてる問題である。ヒストグラムの説明文が六つある：
(a) 1 月には、寒暖差が 10 ℃以上の日はあったが、寒暖差が 12 ℃以上の日はなかった。
(b) 1 月の寒暖差の中央値は、 6 ℃以上 8 ℃未満の階級にあった。
(c) 1 月の寒暖差の平均値は、 6 つの月のヒストグラムから読み取れる寒暖差の平均値の中で 2 番目に大きかった。
(d) 1 月、11 月ともに、寒暖差が 4 ℃未満の日は 4 日以内であった。
(e) 11 月には、寒暖差が 2.1 ℃の日があった。
(f) 11 月の寒暖差の最頻値は、4 ℃以上 6 ℃未満の階級の階級値であった。

この問題は、まずヒストグラムの度数を数える必要がある。A から F までの度数はそれぞれ 31, 31, 30, 30, 31, 30 である。したがって、1 月のものは A, B, E のいずれかで、その他の中に 11 月のものがある。
(a) から分かること：　A は 1 月のものではない。
(b) から分かること：　B, E はともにこれを満たす（1 月のものの候補)。
(c) から分かること：　1 月のものの平均値は、六つの中で、2 番目に大きいということなので、少なくとも 3 つ (A, B, E) の平均値を計算しなければならない。B と E をながめてみると、平均値は明らかに E のほうが大きいのが分かる。A と E の平均値は、

$$(\text{A の平均値})=\frac{5\times4+7\times7+9\times8+11\times9+13\times2+15}{31}=\frac{281}{31}=9.06$$

$$(\text{E の平均値})=\frac{6+10+91+72+66}{31}=\frac{245}{31}=7.90$$

となるので、ここで E が 1 月のものであることが分かる。
(d) から分かること:　11 月のものにたいして、寒暖差が 4℃未満の日は 4 日以内なので、C, D, F の

うちこれを満たすものはDしかない。よって11月のものはDである。
(e), (f) は必要ないが、確認のためにつかえる。
∗この問のレベルは2。度数や平均値の計算に時間がかかる(悪い問題ではない)。

(ウ) この問題にはいろんな解法がある。ここでは、1つの解法を示す。△ABC について、三平方の定理（ $15^2+AC^2=25^2$ ）より AC=20 がわかる。すなわち、三辺の比が 3 : 4 : 5 の直角三角形。この三角形と △EBA は相似であることもすぐわかる。よって AE=12cm, BE=9cm。また、平行四辺形の性質などから、等しい角には同じ記号をつけた（丸と三角）。ここで、BC と垂直な直線 FI をひく（ I は BC 上の1点）と、BI=24cm, △FBI の面積は 144。これで、△AGH の面積を求める準備はととのった。△ABG と △AFH は合同だから、

$$(\triangle\text{AGH の面積}) = (\triangle\text{ABF の面積}) - 2 \times (\triangle\text{ABG の面積}) \qquad \cdots \quad ①$$

△ABG の面積を求めるため、△GBE の面積を x とおく。この三角形は △FBI と相似で、BE : BI= 9 : 24= 3 : 8 より、

$$x \ : \ 144 = 3^2 \ : \ 8^2 = 9 : \ 64 \qquad \to \qquad x = \frac{81}{4} \qquad \cdots \quad ②$$

△ABE の面積は 54 だから、$(\triangle\text{ABG の面積}) = 54 - \dfrac{81}{4} = \dfrac{135}{4}$.

①, ② より、$(\triangle\text{AGH の面積}) = \dfrac{1}{2} \times 15 \times 12 - 2 \times \dfrac{135}{4} = \dfrac{45}{2} \ \ (cm^2)$.

∗この問はレベル1。解法がわかっても計算に時間がかかる。

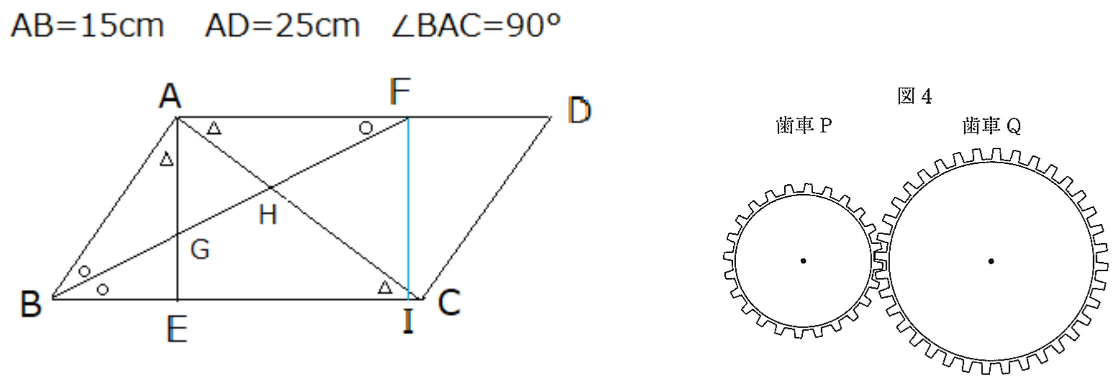


図 3: 問3,（ウ） と (エ)

(エ) 上の右図の歯車P（歯数24）が1秒間に6回転するとき、歯車Q（歯数は不明）が何回転するかを問う穴埋め問題。1秒間で歯車Pのかみ合った歯の数は、$24 \times 6 = 144$ 。歯車Qの歯数が36のとき、Qの回転数は $144 \div 36 = 4$ である ((i) の答え)。Qの歯数が x のとき、1秒間にQが回転する数 y は、$y = \dfrac{144}{x}$ を満たすことは明らか。

∗この問のレベルは3。レベル4に近いやさしさ。

問題4． 図のように2次関数のグラフと直線のグラフが与えられている。
直線 ① は $y = x$,

　直線 ② は　$y = -x + 3$,
　曲線 ③ は　$y = ax^2$.

線分 AB は x 軸と平行、点 A の x 座標は 6。AO : OE = 4 : 3 、点 G の x 座標は 5。

(ア) 2 次関数③の a を求める問題。

点 A の座標は (6, 6) だから

$6 = a \times 36$ より、$a = \dfrac{1}{6}$.

(イ) 直線 EF を $y = mx + n$ としたとき、m, n を求める問題。点 E の座標を $(-b, -b)$ とおくと AO : OE = 4 : 3 より、$6 : b = 4 : 3$. よって

$b = \frac{9}{2}$. 点 E の座標は $E(-\frac{9}{2},\ -\frac{9}{2})$.

F の座標は (3, 0) だから、傾き m は

$$m = \frac{0-(-\frac{9}{2})}{3-(-\frac{9}{2})} = \frac{3}{5}.\quad y = \frac{3}{5}x + n$$ に点 F の座標を代入すると　$0 = \frac{3}{5} \times 3 + n$　より、

$n = -\dfrac{9}{5}$　を得る。

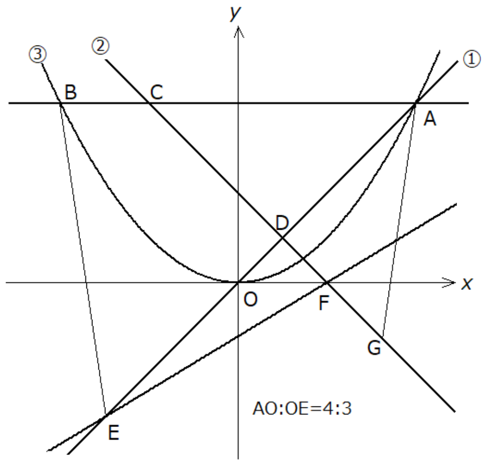


図 4: 問４，２次関数と直線

(ウ) △ADG の面積を S、四角形 BEDC の面積を T として、S : T を最も簡単な整数比で求める問題。G の座標は (5, −2)。S, T は次式で求められる：

　S = (△ACG の面積) − (△ACD の面積)　$\cdots$　①
　T = (△ABE の面積) − (△ACD の面積)　$\cdots$　②

直線①と直線②の交点の座標は　$D(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2})$. また　$C(-3, 6)$ だから、△ACD の面積は AC= 9 が底辺、高さは $6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$ なので、

$$(\triangle\text{ACD の面積}) = \frac{1}{2} \times 9 \times \frac{9}{2} = \frac{81}{4}.\quad \cdots\quad ③$$

①, ②, ③ より、S と T は

$$\mathrm{S} = \frac{1}{2} \times 9 \times 8 - \frac{81}{4} = 36 - \frac{81}{4} = \frac{63}{4},$$

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2} \times 12 \times \frac{21}{2} - \frac{81}{4} = 63 - \frac{81}{4} = \frac{171}{4}.$$

以上より、S : T = 63 : 171= 7 : 19.

＊この問の (ア) はレベル４、(イ) はレベル３、(ウ) はレベル２。教科書にのってるむつかしい部類の問題に相当するか。

問題５. 図 1 は立方体 ABCDEFGH、図 2 は 2 つの袋があり、それらの袋の中にはそれぞれ B, C, D, E, F, G の文字が 1 つずつ書かれた 6 枚のカードが入っている。袋 P と袋 Q からそれぞれ 1 枚ずつカードを取り出し、下のルールに従い、立方体から 2 個の頂点を選ぶ。

【ルール】

・袋 P と袋 Q から取り出したカードに書かれた文字が異なる場合は、それぞれの文字に対応する点を 2 個の点として選ぶ。

・袋 P と袋 Q から取り出したカードに書かれた文字が同じ場合は、その文字に対応する点および点 H を 2 個の点として選ぶ。

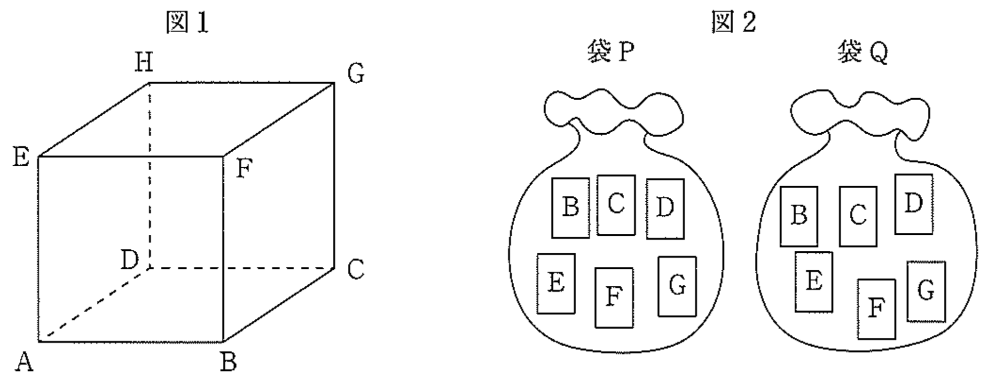


図 5: 問 5 の図

(ア) 選んだ2個の点が、ともに平面ABCD上の点となる確率を求める問題。
右の図は、選ばれる2点を図にしたものである。色のついている1つの四角形が2点を表す。例えば、袋PのCの行と袋QのEの列のぶつかったところの四角形は、2点 C,E を表す。また、Eの行でHが入っているところは、点Eと点Hを表す。他も同様に考えよ。2点を選ぶ場合の数は全部で36通りある。

選ばれた2点が平面ABCD上にあるのは、図のベージュ色の2点が選ばれたときである。これらは6ヵ所あるので、

確率は $\dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.

袋Q / 袋P	B	C	D	E	F	G
B	H					○
C		H		○		○
D			H		○	○
E		○		H		○
F			○		H	○
G	○	○	○	○	○	H

図 6: 問 5，場合の数

(イ) 選んだ2点と点Aで作られる三角形について、3辺の長さがすべて異なる確率を求める問題。三角形の辺の長さは、立方体の一辺を長さ1としたとき、1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ のいずれかである。36個の三角形の中で、3辺の長さが1と $\sqrt{2}$ と $\sqrt{3}$ であるものを探す。図6の左上のマスから考える。△ABH はOKなので、丸印を付ける。△ABC は2等辺三角形なのでダメ（丸印はつけない)。この行でOKなのはもう1つ △ABG がある。

このようにして、図6の各マスにたいして、丸印かつくかつかないかを全部調べると、図6のようになる。16個の丸印があるので、確率は

$\dfrac{16}{36} = \dfrac{4}{9}$.

＊この問の (ア) はレベル3、(イ) はレベル1。36個の三角形を全部調べるのは大変、もし全部調べないですむ方法を考えた奴はすごい。数学の才能があると思ってよい。

問題6． 下図、左のような三角すいの展開図が与えられている。AB=BC=CD=DE=EA=6cm, ∠B=∠C=90° である。点　F は線分 BC の中点、2点 G, H はそれぞれ線分 AF, DF の中点である。題意にしたがって組み立てた三角すいが右図である。補助線を三本引いた（緑色)。点 M は AD の中点、点 N は CN ⊥ FM となるような FM 上の点である。

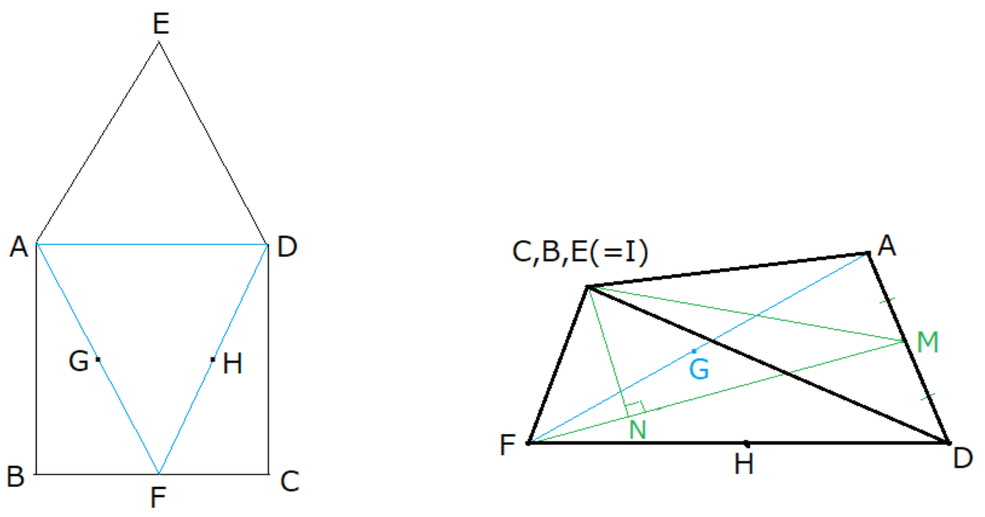


図 7: 問 6 の図

(ア) 三角すいの表面積は左図の 5 角形 ABCDE の面積と同じ。EM の長さは $3\sqrt{3}$ なので、表面積は $36+9\sqrt{3}$ (cm^2).
(イ) 三角すいの底面積は △AFD の面積だから、$\frac{1}{2}\times 6\times 6 = 18$. △CFM と △NFC は直角三角形で相似。3 辺の比は $1:\sqrt{3}:2$ なので、CN= $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ cm。よって三角すいの体積は

$$\frac{1}{3}\times 18\times\frac{3}{2}\sqrt{3} = 9\sqrt{3} \ \ (cm^3).$$

(ウ) 点 G から出発した線（曲線）が、辺 AI, 辺 DI を横切って点 H まで到達したとき、長さが最も短くなるような線の長さを求める問題。これは与えられた展開図を見ているだけでは、とてもわかりませんね。
さて図 7 の三角すいに、CF，FA，AD と鋏を入れて (切って)、もう一度展開図を作ったものが図 8 である。点 H と点 G を結んだ赤の直線は、辺 DA と平行である。そしてこの直線こそが最も長さの短い線であることが明白である。緑色や青で描いた線は、線分 GH より長い。

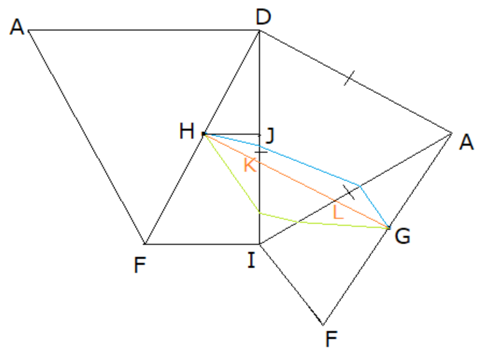


図 8: 問 6，再び展開図

赤い線 GH の長さを求めよう。点 J は HJ ⊥ DI となるような DI 上の点である。△HJK は直角三角形で（∠IKL は 60 °なので）、 ∠JKH=60 °。 HJ= $\frac{3}{2}$ だから、HK= $\sqrt{3}$. KI の長さは、$3-\frac{\sqrt{3}}{2}$. したがって、HG の長さは

$$\sqrt{3}+3-\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3} = 3+\frac{3}{2}\sqrt{3} \ \ (cm).$$

＊この問題の (ア) はレベル３、(イ) はレベル２、(ウ) はレベル１である。(ウ) はほとんどの学生が解けないでしょう（塾などで類似問題を沢山説いている奴はできるかな？)。(ウ) のような問題は解けなくてもいいのですよ。この試験でレベル１と判定した問題は、理系の大学を卒業した大人でも、制限時間内（50 分）では、ほぼ解けないでしょう。